

IETS OVER DE REKENKUNDE IN DE OUDSTE TIJDEN.

DOOR

Dr. J. DE JONG.

In dit opstel wenschen wij een vluchtigen blik te werpen op de geschiedenis der wiskunde en meer bepaaldelijk van haar onderdeel, de rekenkunde, en na te gaan hoe zich die wetenschap heeft ontwikkeld van den tijd, die zich als in nevelen verliest, af, tot op het tijdstip waarop de zuiver wetenschappelijke beoefening der wiskunde kan geacht worden een aanvang te hebben genomen, een tijdstip dat in hoofdzaak samenvalt met het begin van de ontwikkeling der wijsbegeerte in Griekenland.

Hoe ver men ook terugdenke en waar men ook het oogenblik stelle waarop de beoefening der wiskunde als wetenschap is aangevangen, zeker is het dat wiskunstige begrippen even oud zijn als de mensch. In de vroegste tijden toch had de mensch niet alleen reeds min of meer duidelijke voorstellingen van getal, grootte, van lijn, vlak en ruimte, maar hij wist die practisch te verwezenlijken, want hij telde en mat. Wetenschap werd de wiskunde eerst toen men van het bijzondere tot het algemeene leerde opklimmen; intusschen werden langzamerhand de bouwstoffen verzameld die later tot eene wetenschappelijke behandeling moesten dienen.

Ongetwijfeld is tellen de eerste bezigheid geweest die door den mensch

op wiskunstig gebied werd verricht. Waarschijnlijk is eene gebarentaal de eigenlijke taal voorafgegaan en is het tellen toen geschied met behulp der vingers en teenen, waarbij een vinger of teen de plaats van een der voorwerpen vervulde wier aantal men bepalen wilde. Nu nog is deze wijze van tellen bij onbeschaafde volken in zwang. Toen de gebarentaal voor de spreektaal plaats maakte, ontstonden de telwoorden, en deze schijnen inderdaad in de vroegste periode der taalformatie te zijn ontstaan. Dit blijkt uit de groote overeenstemming der telwoorden bij volken tusschen wier talen verwantschap bestaat, eene overeenstemming zoo groot, dat taalvorschers uit de vergelijking der telwoorden in verschillende talen omtrent hare oorspronkelijke verwantschap besluiten trekken. De groote overeenkomst der telwoorden in de talen van volken die gedurende duizende jaren van elkander gescheiden waren, bewijst duidelijk dat er een tijd was, waarin deze scheiding nog niet tot stand was gekomen en dat toen reeds die telwoorden bestonden. Men heeft getracht de hooge oudheid der telwoorden uit hunne etymologie te bewijzen, doch het is niet gelukt daarin stamwoorden te vinden, en evenmin is men er in geslaagd aan te toonen dat er eenige overeenkomst bestaat tusschen de drie eerste telwoorden en de drie voornaamwoorden. Men heeft ook pogingen aangewend om in de telwoorden symbolen terug te vinden van bepaalde hoeveelheden van sommige dingen; in dat geval zou b.v. twee door het woord "vleugel", drie door "klaverblad", vijf door "hand" kunnen worden weergegeven. Nu is, wel is waar, later bij de Indiërs zulk eene voorstelling van getallen door middel van woorden, zelfs bij wiskundigen, stelselmatig geschied, maar het is slechts uit de talen van enkele weinig beschaafde volken gebleken dat zulke plastische voorstellingen de oorsprong der telwoorden zijn. Zoo wordt vaak in de Maleische talen het getal vijf door "hand", in een deel van Amerika elf en twaalf door "voet een", "voet twee", uitgedrukt, omdat men, na aan de tien vingers te hebben geteld, aan de teenen verder telde; zoo heet twintig "mensch", en worden in sommige Afrikaansche talen "hoop" en "berg" voor bepaalde telwoorden gebruikt. Volken intusschen van hoogerem aanleg hebben reeds vroeg de namen der telwoorden zooveel mogelijk losgemaakt van dergelijke concrete voorstellingen. Het spreekt van zelf dat zich, bij het benoemen van een groot aantal van getallen, spoedig de behoefte deed gevoelen een bepaald systeem te volgen: het was toch onmogelijk voor elk een op zich zelf staand woord te vinden.

De overoude wijze van tellen met de vingers gaf reeds dadelijk een hulpmiddel aan de hand. Had men toch aan handen en voeten afgeteld, dan maakte men ter herinnering eene streep in het zand, of men legde, zoo als de negers nog doen, een steentje of maïskorrel op zij en begon op nieuw aan de vingers af te tellen. Had men afgeteld, dan maakte men op nieuw een streep, en zoo vervolgens. Het kwam er nu slechts op aan namen te vinden voor de hoeveelheid die men aan de vingers en teenen of aan de vingers alleen kon aftellen, en voor de laatste dier hoeveelheden het getal waarbij men een teeken gaf dat wij het grondtal van het stelsel kunnen noemen. Stelt men dit getal door x voor, dan kon men bij het verder tellen den naam van x met de namen der hoeveelheden van 1 tot x samenstellen, en men verkreeg langs dezen weg de namen der hoeveelheden van x , x en één, x en 2, x en 3 enz, tot x en x of $2x$, waaraan men op nieuw een naam gaf saamgesteld uit den naam voor de hoeveelheid twee en dien van het grondtal. Op dezelfde wijze kon men van $2x$ tot $3x$, van $3x$ tot $4x$ enz. doortellen en langs dien weg alle hoeveelheden tot x maal x ondubbeltzinnig benoemen. Bij het benoemen van nog grootere hoeveelheden beschouwde men nu x maal x als eene nieuwe eenheid even als men dit met x gedaan had, en kon nu weer de namen der hoeveelheden van één tot x samenstellen met die van het getal x maal x ; zoo werd dan een getal uitgedrukt naar het schema

$$a + b \times x + c \times x \times x + d \times x \times x \times x + \text{enz.}$$

waarin de getallen van één tot x de eenheden, de getallen x , $x \times x$ enz. de termen van de schaal kunnen genoemd worden.

Enkele voor beschaving onvatbare volksstammen uitgezonderd, hebben alle volken een getallensysteem gemaakt en alle in hoofdzaak daarbij hetzelfde beginsel gevolgd. Deze overeenstemming is zonder twijfel in hooge mate merkwaardig, want het eene volk nam zulk een stelsel niet van het andere over, getuige de verschillende waarden van het getal x bij verschillende natiën, en het ware zeker op meer dan ééne manier mogelijk geweest in de behoefte te voorzien om de getallen systematisch te rangschikken en te benoemen.

De namen der eenheden en van de termen der schaal, die van elkan- der volkomen onafhankelijk waren, werden nu zeer verschillend gekozen, en hunne overeenstemming in verschillende talen wijst op de verwantschap die tusschen deze bestaat. Waren echter eenmaal deze namen gekozen, dan moest de samensmelting daarvan, om de overige

telwoorden te vormen, vrij wel overal op dezelfde wijze geschieden, zoodat bijv., zoowel in den naam voor $x + 3$ als in dien voor $3x$, de namen voor drie en x te herkennen waren, en wel in beide op verschillende wijze; en inderdaad heeft dit, op eene enkele uitzondering na, overal plaats gehad. In alle talen gevoelde men de behoefte om eenvoudige namen te geven aan de termen der schaal, waartoe men niet zelden de namen van onbepaalde hoeveelheden als "menigte", "hoop" zal hebben gekozen. Zoo zijn op het accent na de namen voor "tienduizend," en voor "eene groote menigte" in het Grieksch dezelfde. Het getal van termen der schaal, die men elk voor zich benoemde, was in den beginne niet groot, en is vermoedelijk met het gebruik zelf uitgebreid geworden. In de verschillende Indogermaansche talen is eene onmiskenbare overeenstemming tusschen de telwoorden van 2 tot 9, voor tien en honderd, terwijl die volstrekt niet bestaat voor het getal 1000, waaruit volgt, dat dit eerst na de scheiding dier talen is ontstaan. Slechts bij weinige volken is men verder gegaan dan tot de derde term der schaal. De Grieken hadden voor 10000 het woord $\muύριοι$. Bij de Europeesche volken zijn de namen voor hogere termen eerst langzamerhand gevormd. Millioen, dat oorspronkelijk 10 tonnen gouds in het Italiaansch beteekende, werd eerst in het eind der 15^e eeuw als telwoord gebruikt. De namen "billioen", "trillioen" zijn in het begin der 17^e eeuw uitgedacht en eerst in de vorige eeuw door sterrenkundigen en wiskundigen algemeen gebezigd, terwijl het woord "milliard" eerst sedert eene halve eeuw in de geldwereld optreedt. Het eenige volk dat, enkel uit eene bijzondere neiging tot het onmetelijke, reeds van oudsher en veel verder dan noodig was namen gaf aan de termen van de schaal, was dat der Indiërs. In de Mahābhārata, een volks-epos, lang voor de Chr. jaartelling ontstaan, komen de namen voor van 10, 10², 10³... tot 10¹⁷, en Indische geleerden hebben dit, natuurlijk zonder eenig practisch nut, nog veel verder voortgezet. Niet alleen dat dit consequent benoemen de Indiërs veel heeft geholpen bij het uitvoeren van berekeningen, maar zij zijn daardoor vrij gebleven van leemten zoo als die in onze taal bestaan, die geen afzonderlijke namen voor 10¹ en 10⁵ heeft, waardoor wij gedwongen zijn de vermenigvuldiging eener term der schaal tot over het 10voud voort te zetten en te spreken van dertig- en vijftiendahonderd-duizend. Dat veel afhangt van de terminologie, bewijst de omslachtige en onduidelijke manier waarop bijv. de beroemde ADAM RIESE nog in het begin der 16^e eeuw een getal

als: 86789325178 uitsprak bij gebrek aan het woord millioen. Hij geeft dat weer als: zesentachtig duizend, duizend maal duizend, zevenhonderd duizend maal duizend, negen en tachtig duizendmaal duizend driehonderd duizend, vijf en twintig duizend, eenhonderd, acht en zeventig; terwijl de Indiër daarvoor zegt 8 kharva, 6 padma, 7 vyarbuda, 8 kôti, 9 prayuta, 3 laksha, 2 ayuta, 5 sahasra, 1 çata, 7 daçan, 8. Terwijl in de poëzy der Indiërs getallen voorkomen, die alle denkbare grenzen overschrijden, en in Buddhistische geschriften nog namen voorkomen voor termen als $m \times 2^{128}$ waarin $= m10^7$, komen bij HOMERUS geen grootere getallen voor dan myriaden van myriaden, en zochten de Grieken wel geheimen in getallen, maar slechts in hunne eigenschappen, niet door hunne grootte. In de Joodsche letterkunde wordt, even als in de Heilige Schrift, zoo men op het oneindige wil wijzen, gesproken van het zand der zee of de sterren aan den hemel, die Jehova alleen kan tellen.

Wij zagen dat bij het kiezen van een talstelsel alles aankomt op de bepaling van het grondtal x , en, theoretisch beschouwd, heeft elk getal even veel rechten. Intusschen is het in de eerste plaats wenschelijk dat het systeem uit niet te veel elementen opgebouwd zij. Ook vervallen sommige getallen als 7 en 11, omdat men nooit de dingen in zulke groepen samenvoegt. Het meest voor de hand liggen de getallen 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 en 20. Kiest men een klein getal, dan heeft men natuurlijk weinige namen voor de eenheden noodig, maar om tot eene zekere grens te tellen, ook des te meer namen voor de termen der schaal; kiest men daarentegen een groot getal, dan behoeft men meer namen voor de eenheden, maar om tot dezelfde grens te tellen minder namen voor de termen der schaal dan in het eerste geval. Zoo zou men in de stelsels

	3, 4, 5, 6, 10, 12, 20
om tot duizend te tellen	8, 8, 8, 9, 12, 13, 21
» » millioen te tellen	15, 12, 13, 13, 15, 17, 24

telwoorden noodig hebben. Zelfs dus wanneer men tot millioen wilde tellen zouden dus 4, 5 en 6 om bovengemelde reden de voorkeur verdienen boven 10, maar het spreekt van zelf dat de keuze van een klein getal het uitspreken en schrijven van een groot getal zeer lastig zou maken. De oudere volken brachten natuurlijk dergelijke beschouwingen niet in rekening. Zij volgden eenvoudig den weg die het meest voor de hand lag, en dan bood de natuur hun van zelf de getallen 5, 10, 20 aan. Alle vol-

ken hebben dan ook een dier getallen tot grondtal van hun stelsel gekozen; noch het verhaal als zouden de Nieuw-Zeelanders een systeem hebben gevormd met 11 als grondtal, noch dat volgens hetwelk de Chineezzen behalve het 10tallig nog het 2tallig stelsel hebben gebruikt verdient vertrouwen. Het algemeenst verbreid is het 10tallig stelsel, waaruit zou volgen dat het tellen met de vingers de eerste manier van tellen is geweest. Bij minder beschaafde volken komt even vaak het 5tallig stelsel voor. Bij zulke volken worden dan de telwoorden gevormd van 1 tot 5 en de verdere naar het schema $5 + 1$, $5 + 2$ enz.; 10 echter verkrijgt in zulk een stelsel nergens den naam 2×5 , maar steeds een bijzonderen naam; zulk een stelsel komt dus eigenlijk op het 10tallige neer. Het 20tallig systeem, misschien uit de gewoonte te verklaren van aan handen en voeten af te tellen, en dat ons schoeiseldragende volken daarom vreemd voorkomt, is niet alleen bij sommige Afrikaansche stammen in gebruik, die op een lagen trap van ontwikkeling staan, maar eveneens bij de beschaafde Azteken van Mexico en de Indianen van Yucatan. Zelfs heeft het wortel geschoten bij twee takken van den Indo-germaanschen taalstam, de Kaukasische en de Celtische, hoewel het voor het overige in Azie en Europa slechts weinig is doorgedrongen. Door het Celtische Bas-breton, dat nog thans in Bretagne gesproken wordt, is het in de Fransche taal binnengeslopen, getuige bv. *soixante-dix* voor 70 en *quatre vingts*, *quatre vingt dix* voor 80 en 90. Ook worden nog *six vingts*, *sept vingts*, hoewel niet zoo vaak voor 120 en 140 gebruikt. In het Deensch, waar het decimale stelsel geheel gevolgd wordt, worden 50, 70, 90 door $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ maal twintig uitgedrukt.

Hebben wij gezien dat in een zelfde taal de vijf-, tien-, of twintigtallige stelsels vaak in elkander overgaan, evenzeer vindt men bij het tientallige stelsel in talen, die op een hoogen trap van ontwikkeling staan, vaak telwoorden van afwijkenden vorm, die op hun afkomst uit de drie- en viertallige stelsels wijst, en het kan zelfs bevreemden, dat dit niet veel meer voorkomt. De natuurlijke vorming van groepen toch is die van twee en drie, en de meest voor de hand liggende deeling die in twee, drie en vier, zoodat dan ook altijd bij maten, munten en gewichten het getal 12 eene hoofdrol heeft gespeeld en nergens 10 werd gebruikt. Nu heeft wel is waar het decimale systeem bijna overal het duodecimale verdrongen (hoewel tot nog toe bij de cirkelverdeling dit laatste is blijven heerschen), maar het is duidelijk dat de 12-,

4- of 3tallige stelsels niet zonder invloed konden blijven bij de vorming der telwoorden. Bovendien zijn er andere oorzaken die eene regelmatige vorming in den weg staan. Behalve toch de begrippen van optelling en vermenigvuldiging, die, zooals wij zagen, op den voorgrond traden bij de vorming der telwoorden, komen die der aftrekking en deeling eveneens in het spel en doen hunne werking gevoelen, en zooals van zelf spreekt in verschillende talen op verschillende wijze. Zoo wordt het getal achttien in het

Latijn	decem-et octo	(10 en 8).
	of duo de viginti	(20 min 2).
Grieksch	ὀκτώ-και-δέκα	(8 en 10).
Fransch	dix-huit.	
Duitsch	acht-zehn.	
Bas-breton	tri-omch	(3×6).
Welsh	deu-naw	(2×9).
Azteeksch	caxtulli-om-eq	(15+3).

genoemd. Van de eerste vier talen, waarin het decimale stelsel wordt gebruikt, is de naam "decem et octo," "dix-huit" normaal gevormd. Hoewel in het Grieksch en Duitsch de namen voor 8 en 10 in de samenstelling duidelijk te herkennen zijn, zijn de woorden *ὀκτώ-και-δέκα* en *acht-zehn* abnormaal gevormd, omdat daarin de 8 de 10 voorafgaat. Het spreekt van zelf dat het Latijnsch "duo de viginti" (twee van twintig) abnormaal is, zelfs wanneer het twintigtallig stelsel gebruikt werd. Dit systeem is van gebruik in het Bas-breton, het Welsh, en het Azteeksch, waaruit volgt dat de namen van 18 in deze talen abnormaal gevormd zijn.

De ontwikkeling van het schrift ligt even als die van de taal in de diepste duisternis gehuld. Twee onderstellingen zijn hier te maken. Het begin van alle schrift was de reproductie van bepaalde voorwerpen, en daaruit ontwikkelde zich het letterschrift, of dit laatste ontstond eerst na de ontwikkeling der klanken en begon met deze weer te geven. Voor ons onderwerp is het cijferschrift van belang. In het algemeen neemt dit onder alle talen eene bijzondere plaats in, te midden van het gewone schrift. In de Egyptische hieroglyphen en in het Chineesche schrift zijn de cijfers met het overige schrift gelijksoortig. In andere talen echter zijn de cijfers geheel verschillend van het overige

geschrevene, zij staan niet in verband met de klanken van het woord dat zij weergeven en zijn klanklooze teekens die het getal voorstellen. Verschillende volken konden elkanders teekens overnemen zonder dat hun schrift daardoor leed.

Men meent uit het Egyptisch schrift te kunnen bewijzen, dat het letterschrift zich uit het teekenschrift heeft ontwikkeld. Is deze meening gegrond, dan zou men de cijfers moeten beschouwen als overblijfselen van het oude teekenschrift, die te midden van de wijzigingen daarin aangebracht onveranderd zijn gebleven.

Aan den anderen kant is het niet geheel onwaarschijnlijk, dat cijfers de eerste letters zijn van de telwoorden of hunne afkortingen, want onmiskenbaar is meestal de overeenkomst tusschen de cijfers en de letters van het alphabet; in dat geval zou dus het letterschrift het oorspronkelijke schrift zijn geweest. Intusschen is men er niet in geslaagd de overeenkomst tusschen cijfers en de eerste letters van de telwoorden boven twijfel te verheffen, en is het alleen in het oud-grieksch zeker dat men de eerste letters van sommige telwoorden als cijfers gebruikte, terwijl enkele cijfers, als de Romeinsche C en M, eveneens aan denzelfden oorsprong hunnen vorm te danken hebben. In later tijd evenwel zijn herhaaldelijk de letters van het alphabet in hare volgorde als cijfers gebruikt. Voor zoover onze kennis tot heden reikt, zijn cijfers dus overal teekens die zekere begrippen weergeven, geen reproductiën van klanken of woorden. Dat in zulk een symbolisch schrift geen willekeur kon heerschen en men spoedig genoodzaakt was een bepaald systeem te volgen, spreekt wel van zelf.

De oudste wijze om getallen voor te stellen was door middel van rechte strepen, hetzij horizontaal of verticaal naast elkander geplaatst, eene methode die in de kerfstokken nog terug te vinden is en bij de wilden in Noord-Amerika nog wordt gevolgd. Dat zij algemeen was in de oudste tijden blijkt daaruit, dat zij zoo vaak in het schrift is doorge drongen. De Egyptenaren in hunne hieroglyphen, de Babyloniërs, de Grieken in hun oudst cijferschrift en de Romeinen in het schrift dat zij aan de Etruriërs ontleenden, duiden de getallen van 1 tot 10 aan door een overeenkomstig aantal verticale strepen. In het Chineesch en het oudst Indisch worden althans de drie eerste getallen door even veel horizontale strepen voorgesteld. Reeds de Egyptenaren verbonden die strepen tot een doorlopende haal. De teekens, die uit de op die wijze verbonden horizontale strepen ontstaan, herinneren levendig aan

de nieuwe Sanskriet en aan onze moderne cijfers. De teekens die uit de verbinding der verticale strepen zijn ontstaan, zijn bijna onveranderd overgegaan in de geleerdentaal der Perzen tijdens de Sassaniden en bij de Arabieren na de verovering van Perzië. Men heeft zich veel moeite gegeven om in de Romeinsche cijfers en in onze moderne een zeker aantal verticale en horizontale strepen terug te vinden, doch zonder veel resultaat. Het is slechts van weinige cijfers zeker, dat zij symbolische voorstellingen zijn; zoo wordt in de Egyptische hieroglyphen 1000 door eene lotusbloem, het zinnebeeld der vruchtbaarheid, voorgesteld.

Hetzij het cijferschrift vroeger dan, tegelijk met, of later dan het gewone schrift is ontstaan, zeker is het dat de oorsprong daarvan, die zoo als wij zagen geheel in het duister ligt, in de vroegste tijden valt; want reeds op de allereerste inschriften vindt men cijfers. Dat deze hun ontstaan zouden verschuldigd zijn aan de behoeften van den handel is te meer onwaarschijnlijk, omdat nergens de practische behoefte eenigen vooruitgang heeft veroorzaakt noch in het cijferstelsel noch in de rekenmethoden, getuige de Romeinen, die tot op het einde toe zich van uiterst gebrekkige hulpmiddelen bedienden. Terwijl bij de vorming der telwoorden bij alle volken dezelfde leidende gedachte werkzaam geweest is, loopen de cijferstelsels zeer uiteen en wijst het zelfs bij één volk op zoo verschillende beginselen, dat daaruit op te maken valt hoe eerst langzamerhand de moeilijkheden werden weggeruimd. Een volkomen cijferstelsel vindt men eerst bij de Indiërs, die voor getallenverhoudingen eene bijzondere begaafdheid bezaten; alle anderen zijn slechts als voorloopers daarvan te beschouwen en voldoen slechts gedeeltelijk aan de eischen, waaraan het stelsel moet voldoen, namelijk: zoo kort en aanschouwelijk mogelijk elk getal voor te stellen naar gelang het in het getallensysteem is ontstaan door middel van de vier hoofdbewerkingen, waaraan men alle grootheden kan onderwerpen.

Bij alle volken, wier cijfers wij kennen, werd het cijferstelsel in overeenstemming gevormd met dat der telwoorden, dus naar het stelsel 10 (behalve de Mexicanen, die een stelsel hebben op 20 berustende). Steeds worden de getallen 1 tot 10, en de termen van de schaal 100, 1000 enz., door eenvoudige teekens aangeduid, terwijl de eenheden dikwijls door herhaling van het teeken 1, eene streep, worden voorgesteld. Nooit werd een samengesteld getal door een enkel teeken voorgesteld, maar steeds in deelen van verschillende orden ge-

splitst, waarbij in het algemeen de hoogere orde de lagere voorafgaat. Alleen bij de Romeinen werd ook wel het getal gevormd door aftrekking van twee andere, waarbij dan het kleinst voorop kwam. De Chineezzen, die van boven naar beneden in kolommen schrijven, beginnen met het grootste; de Phoeniciërs, die van rechts naar links schrijven, schreven den hoogsten term der schaal het meest rechts, en zoo vervolgens. Bij het vormen der teekens voor de veelvouden der termen der schaal, hetgeen zou moeten geschieden door samenstelling der teekens X, C, M en de teekens van 1 tot 9, is men het meest van de theoretische eischen afgeweken, en het is juist daarin dat de verschillende stelsels het meest van elkander afwijken. Bij sommige volken worden de cijfers van 1 tot 10 door de eerste letters van het alphabet weergegeven, terwijl de volgende dienen om 10, 20, 30 100, 200, 900 aan te duiden. Bij andere worden de veelvouden van X, C, M voorgesteld door herhaling van die teekens. Om het herhaaldelijk neerschrijven te ontgaan, werden dan nog vaak bekortings-teekens ingevoerd, bijv. in het Phoenicisch had men nog een afzonderlijk teeken voor 20, in het Grieksch duidde men vijfvouden eener term der schaal aan door het teeken van dien term in dat van vijf te plaatsen. Een ander stelsel is dat, waarbij men, om een zeker veelvoud eener term der schaal te schrijven, bijv. een n .voud, n schrijft vóór de term der schaal. In dit stelsel zou bijv. achttien honderd vijf en zeventig geschreven worden 1M8C7X5. Hoewel het meest overeenkomstig met de spreektaal, werd dit stelsel slechts spaarzaam toegepast, misschien wel daarom omdat het weinig voordeel opleverde, daar waar geen teekens bestonden voor termen der schaal hooger dan M, en men dus om grootere getallen uit te drukken als coëfficiënten grootheden zou hebben moeten invoeren, die zelf samengestelde getallen zijn. Eene schrede verder was het stelsel, waarin men den coëfficiënt van den term der schaal neerschreef en daarboven een teeken om den rang van den term aan te duiden, bijv. driehonderdvijftig $\frac{C}{3} \frac{X}{5}$. Hier treedt voor het eerst het begrip der rangschikking naar de orde in de schaal op. De Romeinen duidden vaak veelvouden van 1000 aan door boven den coëfficiënt het teeken — te plaatsen, en de honderdduizendtallen door dien coëfficiënt bovendien tusschen haakjes te zetten. Zoo is bijv. $(\bar{X}) = X. 100000 = 1000000$. De Grieken, die met hunne alphabetische cijfers tot 900 gaan, duiden 1000 tot 9000 aan door aan de cijfers

van 1 tot 9 eene verticale streep te doen voorafgaan, terwijl de Syriërs door middel van punten en strepen, hoewel zij alphabetisch slechts tot 400 gaan, hunne eenheden gebruikten om getallen zelfs grooter dan 100000 uit te drukken. In het stelsel der kolommen werden de getallen op eene tafel geschreven, die eene rij van kolommen bevatte met 1, X, C, M, tot hoofd; voor elk getal behoefde men dan slechts de coëfficiënten van 1, X, C, M enz. op te schrijven. Het stelsel dat wij nu volgen door eenvoudig de coëfficiënten der termen van de schaal geregeld naast elkander te schrijven, zoodat de plaats van elk tevens aanduidt welke eenheid daardoor wordt voorgesteld, heeft zich historisch het laatst ontwikkeld. Hierdoor was het vinden van teekens voor hoogere termen van de schaal overbodig, maar was aan den anderen kant een teeken noodig om aan te duiden dat bijv. een of meer termen van de schaal in het getal ontbraken. Daartoe bedachten de Indiërs, — want hoewel dit stelsel gewoonlijk het Arabische genoemd werd hebben de Arabieren het op hunne beurt aan de Indiërs ontleend — het cijfer 0. Tot in de 4^{de} eeuw na Chr. komt dit systeem in Hindostan op munten en inschriften niet voor, maar het is waarschijnlijk dat, terwijl het zoogenaamde alphabetische cijferstelsel nog heerschte, het nieuwe stelsel reeds tot de meer ontwikkelde kringen was doorgedrongen; intusschen is het gebleken dat het eerst in de 7^{de} eeuw gebruikt is geworden.

Het behoeft nauwelijks betoog dat men reeds sedert de oudste tijden berekeningen uitvoerde, want regelmatig met de allereerste sporen van beschaving werden deze noodzakelijk. Het beheer van bouwlanden met min of meer geregelde heffing van belastingen, de regeling van maten, munten en gewichten, het vaststellen van den kalender en van de tijdrekening in nauw verband met de eerste ontwikkeling der sterrenkunde, dit alles kon niet tot stand komen zonder het toepassen van de eerste beginselen der rekenkunde. Natuurlijk waren de vraagstukken waaraan men zich in de hoogste oudheid waagde zeer eenvoudig en hunne oplossingen zeer primitief, want slechts langzaam ontwikkelde zich de aanleg tot abstract denken, en daarbij kwam nog dat de hulpmiddelen uiterst onvolkomen waren. In de oudste tijden was het schrijven weinig algemeen en moeilijk, het schrijfmateriaal duur; men rekende dus uit het hoofd, omslachtige berekeningen waren natuurlijk onuitvoerbaar. Men had hulpmiddelen om groote getallen in het geheugen te bewaren door bv. de vingers in allerlei toestanden met betrekking

tot elkander te brengen, en overigens was men er op uit de berekeningen zoo eenvoudig mogelijk te maken, en daartoe verdeelde men de maten en gewichten zoo aanschouwelijk mogelijk. Bij de Romeinen speelde de verdeeling in 12 eene hoofdrol, bij de Babyloniërs was het getal 60 daartoe aangewezen. Zij verdeelden niet alleen hunne gewichten en munten in 60 gelijke deelen, maar ook de graden aan den hemel, het uur van den dag, en elk dezer deelen wederom in 60 gelijke deelen. Hunne opgaven omtrent de grootte hunner steden of van hunne meren toonen aan dat dezelfde indeeling stelselmatig werd gevolgd. Langzamerhand werd aan zulk een getal een diepere beteekenis gehecht, en men meende het overal in de natuur der dingen terug te vinden; de Chaldeeuwen schatten den tijd van de schepping der wereld tot op den zondvloed op $20 \times 60 \times 60$ jaren, den tijd van den zondvloed tot op cyrus op $10 \times 60 \times 60$ jaren, en hun sterrenkundige tijdkring was 600 jaren. Allengs werden zulke getallen, hoewel geheel subjectief gekozen, met een geheimzinnig karakter bekleed; zij golden als heilige getallen en als van goddelijken oorsprong.

De eenvoudigste wijze van optellen van twee hoeveelheden was waarschijnlijk die, waarbij men eerst zooveel eenheden nam, bv. steentjes of maïskorrels, als de eerste hoeveelheid bedroeg, en dan met de tweede verder telde, tot dat men al die steentjes had gebruikt. Het laatste getal was dan de som. De Grieksche en Latijnsche namen voor het rekenen $\psiηφισιν$ = calculare (van $\psiηφος$ = calculus = steentje) bewijst genoegzaam dat deze methode werd gevolgd. Dat de vingers ook wel als dergelijke eenheden gebruikt werden, ligt voor de hand, en het Grieksche woord $πίμπαζεν$ (van $πέντα$ = vijf), dat ook wel voor rekenen gebruikt wordt, pleit daarvoor. Kinderen passen ze nog toe, en onbeschaafde volken dragen dan ook wel voor handelsgebruik een zakje met maïskorrels bij zich. Eene schrede verder was de optelling van samengestelde getallen: men telde dan de eenheden, de tientallen enz. der op te tellen hoeveelheden afzonderlijk op. Denkt men zich de verschillende regelen bij het vormen der cijfers gevolgd, dan is het gemakkelijk te begrijpen dat in oude tijden vaardigheid in het rekenen als iets zeer bijzonders gold. Het kon niet anders of er moesten mechanische hulpmiddelen worden bedacht. Men stelde de eenheden, de tientallen enz. door verschillende voorwerpen voor en kon dan met 9 voorwerpen voor elk term der schaal elk getal voorstellen, en verschillende getallen optellen. Het verschil van die voorwerpen kon ge-

legen zijn in hunne grootte, vorm of kleur, zoo als nu nog het geval is met onze fiches aan de speeltafels, of hun rang werd aangeduid door hunne plaats in kolommen op eene tafel aangebracht. Eene zoodanige tot rekenen bestemde tafel is te Salamis gevonden; zij is van marmer en er zijn verschillende lijnen op getrokken, waarop men de tot rekenen gebruikte fiches kon verplaatsen. Zulke houten rekenborden waren nog in de 16e eeuw in Duitschland zeer algemeen. Om eene te groote ophooping van fiches op ééne lijn te voorkomen waren op de rekenborden nog lijnen getrokken tusschen de hoofdlijnen in, zoodat een fiche dat daarop lag bv. 5 maal de waarde had die ze zou hebben als ze lag op eene voorgaande lijn; men behoefde dan hoogstens op ééne lijn vier fiches te hebben. In beginsel waren de Romeinsche rekenborden (*abacus*) daarmede overeenkomstig: het eenige onderscheid bestond daarin, dat de te verplaatsen fiches werden vervangen door knoppen die in sleuven verplaatst konden worden; het aantal dier sleuven bedroeg zes. Het is niet bekend of de Oostersche volken in de oudheid zich van dergelijke hulpmiddelen bij het rekenen bedienden. Slechts in China vinden wij reeds in de 6e eeuw vóór Christus een zoogenaamden "rekenknecht" vermeld, die waarschijnlijk identisch is met het nu bij de Chineezzen zeer verbreide Su'an-p'huan (rekenbord), dat bestaat uit eene rij van gespannen draden of dunne staafjes, die in een raam evenwijdig aan elkander zijn aangebracht en verplaatsbare kogeltjes dragen. Een dwarsstaaf snijdt de staafjes in twee deelen, waarvan het eene twee, het andere vijf kogeltjes bevat; een kogeltje op het eerste gedeelte heeft eene waarde één, op het tweede eene waarde vijf.

Het ontbreekt ons aan rechtstreeksche berichten omtrent de wijze waarop men in de vroegste oudheid vermenigvuldigen uitvoerde; intusschen is het nauwelijks aan twijfel onderhevig, dat men het als herhaald optellen beschouwde, en als zoodanig wordt het zelfs nog opgevat in een werk voor het gebruik van geestelijken bestemd in het jaar 944. Om bijv. 409 met 15 te vermenigvuldigen, wordt eerst 5×400 genomen, door de reeks 400, 800, 1200, 1600, 2000 te vormen; vervolgens wordt 10×400 genomen = 4000, derhalve $15 \times 400 = 6000$. Vervolgens geeft de reeks 9, 18, 27, 36, 45, $5 \times 9 = 45$, $10 \times 9 = 90$, dus $15 \times 9 = 135$. Derhalve door optelling $409 \times 15 = 6135$. Op eene andere wijze was dan ook de vermenigvuldiging onmogelijk, zoo men geene tafels had waarop veelvouden waren aangegeven. Zulke tafels

schen was deze nauwkeurig genoeg voor de practijk. Als voorbeeld diene de rekening der Romeinen met breuken. Oorspronkelijk was de *as* eene koperen munt die een pond woog, de eenheid waarmee men rekende; de *as* had 12 *unciae*, elke *uncia* 4 *sicilici*, elke *sicilicus* 24 *scrupuli*; elk veelvoud van *unciae* enz. had wederom een naam, en op deze wijze kon men nu allerlei breuken door middel van benoemde grootheden uitdrukken. Zoo werd $\frac{1}{24}$ ^{ste} deel van een duim (digitus) *digitus semiuncia*, (1 *semiuncia* = 1 (semi)*uncia* = $\frac{1}{2}$ *uncia* = $\frac{1}{24}$ ^{ste} *as*) ge-

noemd. De optelling van zulke breuken was natuurlijk gemakkelijk; daarentegen gaf de vermenigvuldiging groote bezwaren en eischte veel oefening. Het zesde deel van eene *uncia* heette *sextula*, en zoo was derhalve het kwadraat van eene *uncia* = $\frac{1}{12}$ *as*. $\frac{1}{12}$ *as* = $\frac{1}{12}$ *uncia* = $\frac{1}{2}$ *sextula* = *dimidiasextula*. In de tafels van VICTORIUS kwamen de namen der veelvouden der onderdeelen van de *as* voor en kon men dus uitkomsten verkrijgen als:

$$\text{deunx} \times \text{dextans} = \text{dodrans et sextula}$$

$$\frac{11}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{72}$$

Elke vermenigvuldiging was dus eene afzonderlijke bewerking, en vaardigheid in het rekenen met breuken was dus niet zonder reden iets waarvan men hoog opgaf in haren bezitter.

Deelingen door 5, 7, 11, waren natuurlijk langs dezen weg onuitvoerbaar, en men moest of vervallen in hoogst omslachtige en onduidelijke namen, of zich tevreden stellen met onnauwkeurige uitkomsten. Toch bleven Romeinsche ingenieurs of landmeters tot op het einde zich van deze gebrekkige hulpmiddelen bedienen. De Grieken schijnen in de practijk eveneens hunne breuken als deelen van eene bepaalde eenheid, de *obolus*, te hebben benoemd, maar de Grieksche landmeters rekenden met abstracte breuken; zij verdeelden die in stambreuken welke de eenheid tot teller hadden. Zoo schreven zij voor $\frac{12}{13}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$. Bij de rekening werden de laatste breuken verwaarloosd, en voor de eenvoudigste breuken hadden de Grieken even als de Egypt-

tenaren bijzondere teekens. De Babyloniërs drukten hunne breuken uit in stambreuken, tot noemer 60 hebbende; zij schreven bijv. niet $\frac{2}{3}$ maar $\frac{40}{60}$ en lieten dan den noemer meestal weg.

De verdeeling der eenheid in 10 gelijke deelen ligt zoo weinig voor de hand, dat het geen verwondering kan wekken dat eerst in de 13^{de} eeuw door de Arabieren de decimale breuken zijn ingevoerd.

Het Romeinsche breukenstelsel was in hoofdzaak op de verdeeling in 12 gegrond, bij sommige volken werd 4 in de plaats van 12 gebruikt, en bij de Egyptenaren werd bij het landmeten de lengtemaat in 2, 4, 3, 16 enz. deelen verdeeld. Van al deze oude stelsels heeft de verdeeling in 60 deelen van de Babyloniërs het meest invloed gehad op de wiskunde. PROLOMAEUS nam het over en gebruikte het doorgaans. Van toen af ging het over in alle astronomische en wiskunstige berekeningen, totdat het in de 16^{de} eeuw door het decimale breukenstelsel verdrongen werd. Elke eenheid werd als een graad beschouwd en verdeeld in 60 deelen (minuta prima), elk dezer weer in 60 deelen (minuta secunda) enz.; zoo schrijft bijv. PROLOMAEUS voor de zijde van den regelmatigigen in den cirkel beschreven tienhoek die wanneer de straal = 1 is tot waarde heeft 0,618.... de uitdrukking $37^{\circ} 4' 55''$.

Van eigenlijke rekenkunde, die uit een wetenschappelijk oogpunt de eigenschappen der getallen tracht op te sporen, was in de oudste tijden, zelfs bij de meest ontwikkelde volken, geen sprake. Van de rekenkunde bij de Phoeniciërs is ons niets bekend, zij waren de leermeesters der Grieken in het practisch rekenen. Van de Babyloniërs echter zijn twee documenten hunner rekenkunde bewaard gebleven: het eene eene steenen tafel, waarop de vierkanten der getallen van 1 tot 60 in het 60-tallig stelsel zijn opgeschreven, het tweede eene sterrenkundige tabel, waarop voor elken dag van de maand de grootte van het verlichte deel der maan is opgeteekend. Voor de geheele schijf wordt het getal 240 aangenomen. Voor den 5^{den} tot den 10^{den} dag wordt dan opgegeven de reeks 5, 10, 20, 40, 80, 160, zijnde eene meetkunstige reeks, voor den 10^{den} tot den 15^{den} dag, de reeks 160, 176, 192, 208, 224, 240, zijnde eene rekenkunstige reeks. Het is hieruit vrij zeker af te leiden dat de Babyloniërs zich reeds met reeksen hebben bezig gehouden, en een bericht van Griekschen oorsprong dat de evenredigheden, ja zelfs de harmonische, hun bekend waren, verkrijgt daardoor meer waarde. Intusschen is hun invloed op de rekenkunde bij de Grieken niet voldoende bekend.

Verder dan eenig ander volk (zelfs dan de Grieken tot vóór ARCHIMEDES) hadden de Indiërs het in het practisch rekenen gebracht in een tijd, toen het nu gebruikelijke cijferstelsel nog niet bestond; getuige het examen aan hetwelk BUDDHA naar het verhaal daarvan zich moest onderwerpen om zijn medeminnaar te overwinnen. Rekenkunstige vraagstukken en prijsvragen waren bij de Indiërs zelfs in gezelschappen gezocht en dienden tot uitspanning; daarmede hangt het waarschijnlijk samen dat zelfs nog later Indische wiskundigen hunne voorstellen in een dichterlijk gewaad kleedden, en dat die vorm in de rekenboeken is overgegaan. Van Indische afkomst zijn ook waarschijnlijk vele nu nog bekende rekenkunstige raadselen, en de Indiërs zijn de uitvinders van het schaakspel.
